La teoría de operadores en el mercado de derivados

Oswaldo González-Gaxiola
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas
Universidad Autónoma Metropolitana-Cuajimalpa
México D.F., México
ogonzalez@correo.cua.uam.mx

***Abstract*—** Considering the Black-Scholes equation as a Cauchy problem for different types of investment options, in this paper we see that the second order differential operator: $Au = ax^2D^2u + bxDu - bu$ with $a, b \in \Re$ defined on the Schwartz space $S_0(0,\infty)$ generates a strongly continuous semigroup of operators with which we can obtain the solution of the equation for each of the types of investment as a certain type of evolution equation. Also see the analogy of these problems with some that occur in mathematical physics.

Keyword— Black-Scholes equation, european options, operators semigroup.

***Resumen*—** Considerando la ecuación de Black-Scholes como un problema de Cauchy para diferentes tipos de opciones de inversión, en el presente trabajo haremos un estudio para establecer que el operador diferencial de segundo orden $Au = ax^2D^2u + bxDu - bu$ con $a, b \in \Re$ definido sobre el espacio de Schwartz $S_0(0,\infty)$ genera un semigrupo fuertemente continuo de operadores, con el cual, podemos obtener la solución de la ecuación para cada uno de los tipos de inversión como un cierto tipo de ecuación de evolución. Además se hará notar la analogía de este tipo de problemas con algunos que se presentan en la física-matemática.

Palabras claves—Ecuación de Black-Scholes, opciones europeas, semigrupos de operadores.

I. INTRODUCCIÓN

Los derivados, en general son contratos de compra/venta que, dependiendo del tipo, obligan o permiten a dos agentes establecer un precio de compra/venta y una fecha de contrato por una cantidad fija de activos. En general, un activo puede estar en cualquier mercado financiero. Hay tres tipos principales de derivados a saber:

- Contrato de futuros: Obliga a los miembros a comprar o vender una cantidad determinada del activo subyacente; es decir, que si se está interesado en un activo en particular, se puede acordar con el propietario del activo que en una fecha determinada, por un precio determinado, se haga la compra del activo. El contrato a futuro obliga a ambas partes a realizar la transacción. También, el pago se hace en el momento del intercambio, entonces no cuesta entrar en un contrato a futuro a un precio establecido al momento de hacer el contrato y en una fecha en específico.
- Opciones: Es un contrato que le da al poseedor el derecho, más no la obligación de comprar o vender el activo subyacente antes o en la fecha de ejecución; es decir, al entrar en una opción con el propietario de un activo de nuestro interés, la opción nos da la posibilidad de comprar el activo durante la vigencia del contrato; de la misma manera, se puede elegir no comprar el activo. La opción obliga al otro miembro a vender el activo en caso de requerirse. De la misma forma, se puede hacer una opción que obligue a un agente a comprar el activo en caso de que el otro decida venderlo. Los intercambios deben hacerse antes de la fecha de ejecución.

- (Swap: Se usa el término Swap para referirse a un intercambio de futuro de bienes o servicios (incluyendo dinero).

En resumen, un derivado es un producto financiero elaborado sobre la base de un activo. El propietario de una opción tiene el derecho (no la obligación) de compra o de venta de cierto activo en una fecha futura a un precio determinado. Uno de los tipos de opciones más sencillas son las que dan derecho a comprar un activo: se conocen como opciones de compra o "call". Es importante tener en cuenta que el propietario de una opción "call" puede escoger no ejercerla y en consecuencia, no obtener ningún beneficio por la opción.

En 1973, la publicación del famoso trabajo de F. Black y M. Scholes que se puede ver en [4] revolucionó los mercados financieros del mundo. Considerando un sencillo modelo para el precio de un recurso financiero, ellos obtuvieron una fórmula analítica para el precio de una opción de compra europea sobre una acción. El modelo de Black-Scholes es una descripción matemática de los mercados financieros y los instrumentos de inversión derivados y nos dice que bajo ciertas suposiciones sobre el mercado, el valor de una opción $C(S,t)$ satisface una ecuación diferencial parcial, la ecuación que abajo aparece en (1).

La ecuación de Black-Scholes fue deducida en [4], [10] y es la ecuación diferencial parcial lineal

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}+rC\frac{\partial C}{\partial S}-rC=0, \quad 0\leq t<T, \quad S\geq 0, \qquad (1)$$

donde $C(S,t)$son los valores de la opción de algún tipo como función del precio de los activos S y del tiempo t, μ es la rentabilidad (media) instantánea, σ es la volatilidad del stock [10]. En el presente trabajo vamos a considerar la ecuación de Black-Scholes (1) como un cierto operador actuando en un espacio de Banach apropiado y usando la teoría de semigrupos fuertemente continuos vamos a caracterizar el semigrupo cuyo generador es dicho operador y con ello obtendremos el precio de diferentes tipos de opciones de inversión aplicando el semigrupo a elementos del dominio de dicho operador.

II. TRABAJOS RELACIONADOS

Otros autores han considerado el problema de resolver el problema de Cauchy (1) por diferentes técnicas; en [2] se resuelve el problema para opciones europeas tomando en cuenta métodos de transformaciones especiales para hallar el semigrupo generado por el operador involucrado en (1); posteriormente, en [1] el estudio se hace para opciones asiáticas usando funciones especiales, mientras en [3] se resuelve el problema para el caso de opciones americanas también usando teorías de semigrupos probando que la parte de segundo orden del operador de Black-Scholes es un operador sectorial y técnicas de análisis funcional como lo son transformadas de Fourier y teoría espectral entre otras. También en [6] se considera el operador de Black-Scholes como un Hamiltoniano y se encuentra para el caso de opciones de barrera su relación con la mecánica cuántica supersimétrica.

III. EL OPERADOR DE BLACK-SCHOLES

Uno de los resultados más importantes en la teoría de semigrupos fuertemente continuos es el siguiente teorema, cuya demostración es estándar y la podemos hallar en cualesquiera de los textos [7], [8] y [9].

A. Teorema 1

Sea A un operador lineal densamente definido en el conjunto resolvente $\rho(A)$ no vacío. El problema de valor inicial

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), u(t_0) = x, \quad t \geq o, \quad x \in X \qquad (2)$$

tiene solución única $u \in C^1(0,\infty)$ para cada valor inicial $x \in D(A)$ si y sólo si A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\{U_t\}_{t\geq 0}$.

En la presente sección consideraremos un problema de Cauchy como el de la ecuación (2) pero formada a partir del operador de Black-Scholes dado en (1).

Consideremos el problema de Cauchy en referencia a la ecuación (1),

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} + rxu_x - ru = 0, \quad \mathrm{u}(x,\mathrm{T})=\mathrm{h}(x), \qquad (3)$$

donde $(x,t) \in (0,\infty)\times(0,T)$ donde σ y T son constantes que resultan del modelo, h es una función medible apropiada; T es el tiempo de madurez de la opción (o el tiempo límite en el cual la opción ésta madura). Para resolver este problema de Cauchy debemos de determinar el precio de la opción $u = u(x,t)$.

En esta sección veremos que existe un semigrupo fuertemente continuo $\{U_t\}_{t\geq 0}$ actuando sobre un cierto espacio de Banach tal que la dinámica del marcado de precios estará dado por $(U_{t-T}h)(x) = u(x,t)$.

Sean $a = \frac{1}{2}\sigma^2 > 0$ y $b = r$ un número real y vamos a considerar al operador

$$\hat{A}u = ax^2D^2u + bxDu - bu, \qquad (4)$$

al cual llamaremos operador de Black-Scholes densamente definido en el espacio de Banach $L^p(0,\infty)$.

Sea $\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} - 1\right)$ y definamos al operador con dominio $D(A) = S_0$

$$Af = x^2D^2 f + (2\zeta+1)\, xDf - (2\zeta+1)\, f \qquad (5)$$

donde S_0 es el espacio de Schwartz sobre $(0,\infty)$ con la norma del supremo.

Podemos ver que $aA = \hat{A}$ sobre $D(A)$. Si probamos que A puede escribirse como

$$A = (B+\zeta)^2 - (1+\zeta)^2 \qquad (6)$$

donde B es el generador de un grupo fuertemente continuo (por lo tanto, es también un semigrupo). Se puede ver de esto que A y por lo tanto $\hat{A}$ generan semigrupos de operadores $\{U_t\}_{t\geq 0}$ sobre S_0.

A continuación vamos a establecer dos teoremas (que se pueden ver en [5], con todo y demostración) y que resultaran fundamentales para poder hallar el semigrupo fuertemente continuo generado por el operador de Black-Scholes $\hat{A}$ y con ello la dinámica de evolución (precios de las opciones).

B. Teorema 2

Sea $(V_t f)(x) = f\left(xe^t\right)$ para cada $f \in S_0, x \geq 0$ y t es un número real no negativo. Entonces $\|V_t\| = 1$ para $t \in \Re$ y $\{U_t\}_{t\in\Re}$ es un grupo fuertemente continuo sobre S_0 con generador

$$Bf := xDf, D(B) := S(0,\infty) = S_0 \qquad (7).$$

A continuación tenemos otro teorema, cuya demostración completa se halla en [5] y que nos caracteriza explícitamente la solución del problema de Cauchy dado en la ecuacion (3).

C. Teorema 3

El operador $\left(\hat{A}, D(A)\right)$ genera un semigrupo fuertemente continuo de operadores $\{U_t\}_{t\geq 0}$ analítico con $\delta = \frac{\pi}{2}$ sobre S_0, dado para cada $f \in S_0, x \geq 0$ y $t \geq 0$ por

$$(U_t f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} \left(V_{s\sqrt{2at+(b-a)t}} f\right)(x)\, ds, \qquad (8)$$

IV. Aplicaciones a opciones europeas y asiáticas

En esta sección se usaremos los resultados de la sección anterior para encontrar el precio de una opción de inversión modelada por medio de la ecuación de Black-Scholes.

A. Opciones Eruopeas

Consideremos el operador de Black-Scholes de (4) con $a > 0, b > 0$ densamente definido en $L^p(0,\infty)$:

$$\hat{A}u = ax^2D^2u + bxDu - bu,$$

podemos ver que $aA = \hat{A}$ sobre $D(A)$, para cada $f \in D(A)$, tenemos

$$aAf(x) = \left(\hat{A}f\right)(x) = \left(\frac{1}{2}\sigma^2x^2D^2 + rxD - r\right)f(x),$$

y así la ecuación de Black-Scholes se convierte en el problema de Cauchy

$$a\hat{A}f(x,t)+f_t(x,t)=0, \quad f(x,T)=h(x)$$

para algún $h\in S_0$, usando el teorema 3 sabemos que $\hat{A}$ genera un semigrupo fuertemente continuo $\{U_t\}_{t\geq 0}$ y así la opción de precios al tiempo $t\in[0,T]$ es dada por

$$(U_t h)(x)=e^{-b(t-T)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}s^2}f\left(e^{s\sqrt{2a(T-t)}-(b-a)(T-t)}x\right)ds$$

obteniendo así el precio de la opción para cualquier tiempo antes o hasta el tiempo de madurez de la opción T.

B. *Opciones Asiáticas*

Una opción asiática (u opción de valor promedio) es un tipo especial de contrato de opciones. Para las opciones de Asia la rentabilidad está determinada por el precio medio subyacente sobre algún período de tiempo pre-establecido. Esto es diferente para el caso de la opción europea habitual y la opción americana, donde la rentabilidad del contrato depende del precio del instrumento subyacente a su vencimiento. Las opciones asiáticas son, una de los ejemplos básicos de opciones exóticas.

La ecuación de Black-Scholes para la opción asiática es

$$u_t(x,t)+\frac{1}{2}\sigma^2x^2u_{xx}(x,t)+rxu_x(x,t)-ru(x,t)=0,$$

con la condición inicial $u(x,T,A_T)=f\left(x,\frac{A_T}{T}\right)$, aquí $A=A_T=\int x(t)dt$ es una función continua del precio de los activos y f es la función de pagos. Si proponemos las siguientes transformaciones

$$u(x,t)=x^n f(x,t)e^{b\frac{x}{A}}, \quad y=\frac{x}{A^2}, \quad n=\frac{-r}{\sigma^2}, \quad b=\frac{2}{\sigma^2}$$

que dan como resultado que la ecuación anterior se convierte en una cierta ecuación diferencial parcial tipo parabólico y se cumple

$$f(y,t)=e^{\frac{-1}{2}\left(r-\frac{r^2}{\sigma^2}\right)t}g(y,t)$$

donde $g(y,t)$ satisface

$$g_t+\frac{1}{2}\sigma^2y^2g_{yy}=0.$$

Siguiendo nuevamente los cambios de variables $\tau=T-t$ y $z=\ln y$, la ecuación de Black-Scholes para opciones asiáticas se transforma finalmente en la ecuación de calor:

$$\frac{\partial g}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 g}{\partial\eta^2}, g(\eta,0)=f(\eta,T)$$

donde se tiene $\eta=\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\zeta$ con $\zeta=z-\frac{1}{2}\sigma^2\tau$, luego considerando la solución de la ecuación de calor, tenemos:

$$(U_t f)(x) = (U_{T-t} f)\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)\left(\ln\left(\frac{x}{A^2}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)\right);$$

donde U_t es el semigrupo de calor en $(0,\infty)$, es decir, $U_t f = G_t * f$, donde $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}}$ es el núcleo de calor estándar [8] , [9].

V. Conclusiones

En la actualidad, el estudio de mercados financieros (mercado de opciones) está motivando el desarrollo de otras partes o áreas de las mismas matemáticas y para formular y hallar soluciones a nuevos modelos, se está recurriendo a métodos de diferentes áreas científicas como lo son la mecánica cuántica y la computación, entre otras. Por lo anterior, los financieros buscan emplear matemáticos que les hagan modelos que les ayuden a tener mayores ganancias tanto la largo como a corto plazo y que les aseguren no sufrir perdidas significativas como consecuencia de realizar inversiones. Uno de los instrumentos más usados por las personas que ejercen las finanzas son las "opciones" que son a *grosso modo* contratos de compra o venta a futuro, los cuales por ser a futuro tienen implícita una cierta incertidumbre que es deseable minimizar sin detrimento de ganancias. Como se puede percibir, las matemáticas han jugado un papel esencial en el desarrollo de la economía financiera convirtiéndose en una herramienta valiosa para el mundo moderno.

Este artículo tuvo como propósito hacer una presentación, con cierto formalismo matemático y con suficiente profundidad conceptual, de un modelo de valoración de derivados financieros publicado en 1973 en [3], conocido en el ámbito financiero como el modelo de Black-Scholes, y aceptado desde entonces, como uno de los modelos matemáticos más importantes en la toma de grandes decisiones financieras a nivel mundial. La finalidad ha sido también hacer una divulgación de ese modelo, que acaba de cumplir 40 años de vida y mostrar una alternativa de solución desde el punto de vista del análisis functional y siguiendo ese fin hemos visto como la teoría de operadores y la teoría de semigrupos de operadores es una herramienta útil en la solución de problemas de evolución como lo es la ecuación de Black-Scholes.

Referencias

[1] D. I. Cruz-Báez and J. M. González-Rodríguez, A Different Approach for Pricing Asian Option, Applied Math. Letter. Vol. 21, No. 3, 303-306, (2008).

[2] D. I. Cruz-Báez and J. M. González-Rodríguez, Semigroup Theory Applied to Options, Journal of Applied Mathematics. Vol. 2-3, No. 3, 131-139, (2002).

[3] D. I. Cruz-Báez and J. M. González-Rodríguez, A Semigroup Approach to American Options, J. Math. Anal. Appl. 302, 157-165 (2005).

[4] F. Black and M. Scholes, The Pricing Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy, (81), 637-659 (1973).

[5] O. González-Gaxiola, José A. Santiago; The Black-Scholes Operator as the Generator of a C_0-Semigroup and Applications, Int. Journal of Pure and Applied Math. Vol. 76, No. 2, 191-200 (2012).

[6] Juan M. Romero, O. González-Gaxiola, J. Ruiz de Chávez and R. Bernal-Jaquez; The Black-Scholes Equation and Certain Quantum Hamiltonians, Int. Journal of Pure and Applied Math. Vol. 67, No. 2, 165-173 (2011).

[7] Klaus-Jochen Engel; Rainer Nagel, One-parameter semigroups for linear evolution equations; Springer, New York, (1999).

[8] Mc Bride A. C., Semigroup of Linear Operator: An Introduction; Longman Scientific and Technical, New York, (1987).

[9] Pazy, A., Semigroups of Linear Operator and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences Springer-Verlag: New York, (1983).

[10] Seán Dineen, *Probability Theory in Finance*; Graduate Studies in Math, AMS; Rhode Island, (2005).