

Los modelos para la simulación del moldeo por inyección

revisión y comparación

Hector Yznaga¹, José Ortiz¹, Felipe Avalos¹, María Téllez¹, Rafael Aguirre²

Facultad de Ciencias Químicas¹, Centro de Investigación en Química Aplicada²
Universidad Autónoma de Coahuila¹, Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología²
Saltillo, Coah.; México

[hactoryznaga, jortiz, favalos, mauratellez]@uadec.edu.mx, rafael.aguirre@ciqa.edu.mx

Abstract—Computer aided simulation is of great current value for the plastics industry. In this paper the used models and their formulations were organized in sequential categories: mid-plane model and surface model, which are associated with the Hele-Shaw approximation, and 3D solid model. The boundary conditions, the numerical methods implementation and a comparison between models, exposing the advantages and disadvantages of each, were presented. In situations where accuracy of models based on the approximation of Hele-Shaw fails in the prediction of the behavior of polymer flow, a full 3D simulation has become a promising solution.

Keyword— *simulation, injection molding, 3D.*

Resumen—La simulación asistida por computadoras es de gran valor actual para la industria del plástico. En este trabajo se organizaron en categorías secuenciales los modelos que se utilizan y se fundamentaron las formulaciones: el modelo de plano medio y el modelo de superficie, los cuales se asocian con la aproximación de Hele-Shaw, y el modelo sólido 3D. Se presentaron las condiciones de frontera, los métodos de implementación numérica y una comparación entre los modelos, exponiéndose las ventajas y desventajas de cada uno. El modelo sólido 3D es ya una solución a la mano para predecir el comportamiento del flujo de polímero en las situaciones donde falla la precisión los modelos basados en la aproximación de Hele-Shaw.

Palabras claves— *simulación, moldeo por inyección, 3D.*

I. INTRODUCCIÓN

El moldeo por inyección es un proceso ideal para la fabricación de un gran número de piezas geoméricamente complejas. En cuanto a los procesos de transformación de plásticos ocupa el segundo lugar, justo detrás del proceso de extrusión. La aplicación de moldeo por inyección ha estado creciendo rápidamente en varias industrias debido a su alta productividad y versatilidad. Sin embargo, a diferencia de otros procesos industriales, la calidad y el rendimiento de las piezas moldeadas no dependen sólo de la materia, la forma y la función del diseño de la pieza, sino también de cómo se procesa el material durante el moldeo. Como resultado, es difícil de predecir y/o controlar la calidad del producto moldeado sin el uso de programas sofisticados de simulación durante la etapa de diseño.

Los primeros estudios sistemáticos de moldeo por inyección se llevaron a cabo en los años 50, cuando se consideró un modelo unidimensional establecido por una ecuación simple, dada por la ley de la potencia, relacionando el tiempo de llenado con la caída de presión aplicada. Una segunda generación de estudios se presentó a finales de esa década, con el primer modelado no isotérmico del llenado de molde de cavidades delgadas y rectangulares. Isayev y Hieber [1], en los años 80, estudiaron el flujo no isotérmico entre placas paralelas usando una ecuación constitutiva viscoelástica.

Estos modelos adoptados eran unidireccionales y no fueron capaces de dar una imagen satisfactoria del proceso de llenado real [2, 3] teniendo en cuenta que la mayoría de las piezas moldeadas por inyección son en tres dimensiones, con configuraciones geométricas complejas y que la respuesta reológica del polímero es generalmente la de un fluido no Newtoniano y no isotérmico. Los estudios

teóricos de flujo bidimensional en una cavidad delgada, basados en la formulación de flujo de Hele-Shaw, se hicieron para superar la deficiencia del enfoque de flujo de ramificación [4].

Wang y Wang [5] utilizaron un enfoque híbrido (elementos finitos - diferencias finitas - volumen de control) para simular el flujo de polímero en las cavidades con configuración plana tridimensional. Este enfoque se convirtió en el marco numérico estándar para varios paquetes de programas comerciales y códigos de investigación. Por otra parte, la simulación se ha integrado con algoritmos de optimización con restricciones del mundo real para la identificación automática de los parámetros de diseño y el procesamiento óptimo. Desde los años 70, se llevaron a cabo una serie de investigaciones para simular el comportamiento en tres dimensiones (3D) de la fase de llenado en el moldeo por inyección. Existen actualmente tres tipos secuenciales de modelos: modelos de plano medio, modelos de superficie y modelos sólidos 3D.

Este trabajo comienza con el enfoque de Hele-Shaw, que sustenta los modelos más utilizados hasta ahora para la simulación. Se presenta a continuación el modelo de plano medio (2.5D), el modelo de superficie y el modelo sólido 3D con las ecuaciones gobernantes, los métodos de implementación numérica y las condiciones de frontera. Se realizó finalmente una comparación de las ventajas y desventajas de cada uno de los modelos.

II. DESARROLLO DEL TEMA

A. Aproximación de Hele-Shaw

Esta formulación es importante para el desarrollo de los modelos subsiguientes. Con el molde adecuado, para una lámina plana, el problema se convierte en el tipo de flujo de Hele-Shaw con fronteras libres. Se obtienen ecuaciones simples para encontrar una solución analítica satisfactoria [6]. El flujo de Hele-Shaw se define como el flujo de Stokes entre dos platos planos y paralelos, separados por una distancia infinitesimal. El flujo de Stokes es un tipo de flujo de fluidos caracterizado por un bajo valor del número de Reynolds ($Re \ll 1$) lo que significa que las fuerzas inerciales son pequeñas en comparación con las fuerzas viscosas.

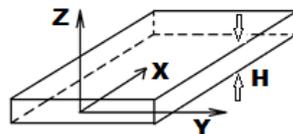


Fig. 1. Descripción esquemática de la configuración de Hele-Shaw

Sean (x,y) direcciones paralelas a las caras y (z) la dirección perpendicular. $(2H)$ es el espacio entre los platos ($z = \pm H$). Cuando el espacio entre las placas es asintóticamente pequeño $H \rightarrow 0$, el perfil de velocidad en la dirección (z) es parabólico (función cuadrática de la coordenada en esta dirección). La ecuación que relaciona el gradiente de presión con la velocidad es:

$$\mathbf{u} = \nabla p \frac{z^2 - H^2}{2\eta} \tag{1}$$

donde, \mathbf{u} es la velocidad, $p(x, y, t)$ es la presión local, η es la viscosidad del fluido.

Esta relación y la uniformidad de la presión en la dirección (z) , permiten integrar la velocidad con respecto a (z) y considerar efectivamente un único campo de velocidad en dos dimensiones (x,y) . Esta ecuación se sustituye en la ecuación de continuidad y se integra a lo largo de (z) y se obtiene la ecuación que gobierna el flujo de Hele-Shaw (2). Esta ecuación se complementa con las condiciones de frontera de no penetración en las paredes de la geometría (3).

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{3}$$

donde, \mathbf{n} es el vector unidad perpendicular a la pared.

III. MODELO DE PLANO MEDIO

El flujo se supone que es casi estacionario y los términos inerciales se desprecian debido a los bajos números de Reynolds en el flujo de polímero fundido [4, 7, 8]. El modelo tiene en cuenta las características generales de las piezas en el moldeo por inyección, las cuales son: el espesor (10^{-1} cm) es mucho menor que las dimensiones globales (desde varios centímetros a 10^2 cm) y la masa fundida del polímero es muy viscosa debido a su larga estructura de cadenas moleculares. La relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas (caracterizadas por el número adimensional de Reynolds) es del orden de $10^{-3} - 10^{-4}$, o sea, valores muy pequeños del número de Reynolds. Por lo tanto, la formulación del flujo de Hele-Shaw, que se basa en el modelo de lubricación de flujo rastrero, es apropiada para realizar el análisis en piezas típicas moldeadas por inyección [7-9]. La formulación de flujo de Hele-Shaw también ignora el cálculo de la componente de la velocidad y la convección térmica en la dirección del espesor. La conducción de calor, en la dirección del plano de la cavidad delgada, se desprecia en comparación con la conducción de calor en la dirección del espesor. Otras simplificaciones adoptadas incluyen despreciar el comportamiento del frente del flujo (flujo fuente), la convección viscosa (fuerza de arrastre), y la conducción de calor en las superficies de las paredes laterales, además del mapeo inteligente donde cambie el espesor de pared [7]. Las ecuaciones de conservación (masa, cantidad de movimiento y energía) son de carácter general. Para la simulación del moldeo por inyección es posible considerar algunas simplificaciones como son: las propiedades de los materiales, las consideraciones geométricas y la manipulación matemática [10].

A. Ecuaciones de conservación

El llenado de una cavidad de molde se convierte en un problema de flujo 2D para la velocidad media en el espesor, la cual está relacionada con el gradiente de presión a través de una cantidad llamada 'fluidez'. Esta representa la suma del efecto del cambio de temperatura y la reología a través del espesor. El plano arbitrario (plano medio/plano central), con un espesor definido, se utiliza para representar la geometría tridimensional de la pieza, de manera que se llama modelo de "plano medio". Aunque la industria se ha referido a ellos como modelos 3D (tridimensional), los modelos son en realidad modelos de plano medio, como se muestra en la Figura 2.

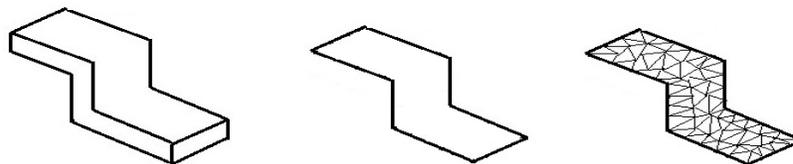


Fig. 2. Simulación basada en plano medio: (a) sólido; (b) plano medio; (c) malla del plano medio

Se asume flujo no isotérmico de un fluido inelástico generalizado en una cavidad estrecha de forma plana arbitraria. El espesor es $2H$ en la dirección (z) la cual es mucho más pequeña que las otras dimensiones. Se asume además simetría en el plano medio.

Considerando fluido compresible [10]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{u}) = 0 \tag{4}$$

donde, $\rho = \rho(x, t)$ es la densidad del fluido y $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ es la velocidad del fluido en el punto.

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \rho\mathbf{u}\mathbf{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{g} \quad (5)$$

donde, $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones y $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ es la aceleración de la gravedad. Esta ecuación sólo tiene en cuenta la conservación del momento lineal. También es necesario considerar la conservación del momento angular. De hecho, la condición necesaria y suficiente para la conservación del momento angular es que el tensor de tensiones sea simétrico $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ [11].

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \beta T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p \right) + p \nabla \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (6)$$

donde, c_p es el calor específico medido a presión constante, $T = T(\mathbf{x}, t)$ es la temperatura en el punto en el fluido, β es el coeficiente de expansión de volumen, p es la presión en el punto en el fluido y k es la conductividad térmica del fluido.

B. Ecuaciones constitutivas

Para lograr avances en el modelado como modelo continuo, se requiere una relación entre la tensión de corte y el movimiento cinemático del fluido. Para fluidos Newtonianos:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} - \frac{2}{3}\eta(\text{tr}\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{D} \quad (7)$$

donde, η es la viscosidad del fluido y $\mathbf{D} = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)/2$ es el tensor de velocidad de deformación. Por lo tanto:

$$\boldsymbol{\tau} = -\frac{2}{3}\eta(\text{tr}\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{D} = \eta\dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (8)$$

donde, $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de tensiones y $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ es la velocidad de deformación.

C. Dependencia de la viscosidad

Con el fin de captar mejor el comportamiento de los polímeros fundidos se permite que la viscosidad dependa de la velocidad de deformación. Esto define una clase de fluidos llamados fluidos Newtonianos, que se utilizan para describir los flujos dominados por las tensiones de corte y son de particular interés para la simulación de moldeo por inyección.

Hay varias opciones para la función de la viscosidad. Los modelos más comunes son: modelo de la ley de la potencia, modelo de segundo orden Moldflow, matriz de datos Moldflow, modelo de Ellis, modelo Carreau y el modelo de Cross [12]. Los más utilizados son el modelo de Carreau, y el modelo de Cross [8]. El modelo de Cross se expresa mediante las ecuaciones (9,10).

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + (\eta_0 \dot{\boldsymbol{\gamma}} / \tau^*)^{1-n}} \quad (9)$$

$$\eta_0 = D_1 \exp \left[\frac{-A_1(T - D_2)}{A_2 + (T - D_2)} \right] \quad (10)$$

donde, A_1, A_2, D_1, D_2 y n , son constantes que se determinan a partir de los datos experimentales y τ^* es el esfuerzo cortante en la transición entre el comportamiento Newtoniano y el comportamiento según la ley de la potencia [9, 12].

El modelo de Carreau se expresa mediante la ecuación (11).

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = [1 + (\lambda \dot{\boldsymbol{\gamma}})^2]^{(n-1)/2} \quad (11)$$

donde, η_∞ es la viscosidad a velocidad de deformación infinita, η_0 es la viscosidad a velocidad de deformación cero, n es una constante con la misma interpretación que en la ley de la potencia y λ , es una constante de tiempo.

Este modelo describe así el comportamiento viscoelástico de soluciones de polímero y de polímeros fundidos para todas las velocidades de deformación y exhibe dos mesetas, a velocidades de deformación bajas y altas, mientras que en el intervalo entre velocidades de deformación intermedias y altas representa bien la ley de la potencia [12, 13].

D. Dependencia de la temperatura

El efecto de la temperatura sobre la viscosidad es de primordial importancia en el procesamiento de polímeros, donde se requiere un estricto control de la temperatura para una operación exitosa. El conocimiento de las tensiones de corte en la masa fundida de polímero es esencial para cualquier evaluación computacional [8]. La viscosidad como una función de la temperatura está dada por una relación exponencial, de acuerdo con:

$$\eta_T = \eta_0 \exp[-\beta_T(T - T_0)] \quad (12)$$

donde, β_T es un factor de cambio de temperatura en la expresión anterior, que relaciona la viscosidad con la temperatura; y η_0 es la viscosidad a una temperatura de referencia. Los valores de β_T para los polímeros están por lo general en el intervalo de 0,01 a 0,04 /°C, pero ocasionalmente pueden alcanzar valores de 0,1/°C o más para algunos polímeros. Otra expresión para la relación viscosidad-temperatura es la ecuación de Arrhenius [14]:

$$\eta_T = \eta_0 \exp \left[\frac{E_a}{R_g} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] \quad (13)$$

donde, R_g es la constante de gas ideal (8,13 J/(mol K)), E_a es la energía de activación (J/mol), T es la temperatura absoluta (K), y T_0 es la temperatura de referencia absoluta (K). Cuando se combinan ambas expresiones, se produce:

$$\beta_T = \frac{E_a}{R_g T T_0} \quad (14)$$

Los polímeros en solución y fundidos son materiales reológicamente complejos que exhiben comportamiento elástico y viscoso y son llamados viscoelásticos [15]. Existen un buen número de ecuaciones constitutivas relacionadas con la viscoelasticidad con cierto grado de éxito y popularidad y se han desarrollado estudios computacionales sobre el procesamiento de polímeros teniendo en cuenta el comportamiento viscoelástico [13, 15, 16], en el que una lista de las categorías de estas ecuaciones y sus predicciones en varios tipos de flujo y deformaciones se muestra como ecuaciones diferenciales, de tipo integral, modelos moleculares y así, sucesivamente.

Entre los modelos moleculares, sobre todo en los años 80, estuvieron los modelos sobre-convectivo Maxwell (UCM) y Olroyd-B. En los años 90 los más populares fueron el Phan-Thien / Tanner (PTT) y la Giesekus mientras que en los 2000 el más utilizado ha sido el modelo de pom-pom. Entre los modelos integrales, el modelo K-BKZ (por las iniciales de Kaye, Bernstein, Kearsley y Zapas) ha sido, por mucho, el más utilizado [8, 17].

E. Consideraciones geométricas

Las ecuaciones anteriores (4-6) son de carácter general y no imponen restricciones a la geometría del flujo. La densidad es una variable de estado y depende de la presión y la temperatura adoptando el sistema cartesiano de coordenadas, donde (x,y) son las coordenadas del plano, (z) es la coordenada del espesor local, y (H) indica el espesor medio. Trabajando con estas condiciones se puede mostrar que las ecuaciones (4-6) para fluido Newtoniano generalizado toman la forma [10, 18]:

$$0 = k \frac{Dp}{Dt} - \beta \frac{DT}{Dt} + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \tag{16}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \tag{17}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{18}$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \beta T \frac{Dp}{Dt} + \eta \dot{\gamma}^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial T}{\partial z} \right) \tag{19}$$

donde, el volumen específico es $V = 1/\rho$ y:

$$k = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \tag{20}$$

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_p \tag{21}$$

son los coeficientes isotérmicos de expansión y expansividad del material, respectivamente. De particular importancia es que la presión no tiene ninguna dependencia de la coordenada (z). La presión se asume constante a través del espesor de la pieza. Esto se conoce generalmente como la aproximación de lubricación (matemáticamente, el uso de la disparidad entre las dos escalas de longitud). Definiendo las velocidades medias a través de espesor, se aplica la condición de fluido sin deslizamiento en la pared y de simetría del plano medio:

$$\bar{u}_x(x, y) = \frac{1}{2H} \int_{-H}^H u_x(x, y, z) dz = \frac{-S}{H} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{22}$$

$$\bar{u}_y(x, y) = \frac{1}{2H} \int_{-H}^H u_y(x, y, z) dz = \frac{-S}{H} \frac{\partial p}{\partial y} \tag{23}$$

donde,

$$S = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-H}^H \frac{z^2}{\eta} dz - \frac{\left(\int_{-H}^H (z/\eta) dz \right)^2}{\int_{-H}^H dz/\eta} \right\} \tag{24}$$

El término S es conocido como la fluidez.

Para establecer una ecuación para la presión que dependa sólo de (x, y), se sustituye (19) en (15) y se integra a través del espesor de la cavidad para obtener:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(S \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \int_{-H}^H \left\{ k \frac{Dp}{Dt} - \frac{\beta}{\rho c_p} \left[\beta T \frac{Dp}{Dt} + \eta \dot{\gamma}^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \right\} dz \tag{25}$$

El lado izquierdo de esta ecuación es reconocido inmediatamente como el flujo de Hele-Shaw en dos dimensiones. La formulación anterior es el modelo de plano medio más popular basado en la aproximación de Hele-Shaw. Este enfoque numérico se volvió el estándar de diversos programas comerciales y códigos de investigación [5, 19, 20]. Se ha ampliado e incorporado por otros investigadores para simular la fase de compactación del moldeo por inyección [21], el enfriamiento del molde, orientación de las fibras, la tensión residual [22], la contracción y alabeo [23] y también para varios procesos de moldeo especiales, tales como moldeo por co-inyección [24], moldeo por inyección asistido-gas, encapsulación de microchips, micro-inyección [25], moldeo por inyección por compresión (Han et al., 1997), moldeo por transferencia de resina [26] y otros. El modelo de plano medio ha dominado la simulación numérica del moldeo por inyección por más de 20 años.

IV. MODELO DE SUPERFICIE (ANÁLISIS 2.5 D)

El componente de la velocidad a través del espesor no se calcula y el modelo de malla representa sólo la forma de la geometría de la pieza [7]. El término "plano medio 2.5D" significa que se utiliza una malla de elementos finitos en 2D (bidimensional), con la línea central del producto, para la solución de la presión y una solución 3D para la ecuación de temperatura, usando diferencias finitas, con un control de volumen finito para la propagación del frente de flujo. Debido a la utilización de elementos finitos y diferencias finitas para resolver la presión y temperatura, respectivamente, este enfoque es conocido como técnica de análisis híbrida [10].

A. Modelo de superficie

El modelo de plano medio funciona bien siempre en el caso de piezas de paredes delgadas pero la complejidad de la creación de la malla del plano medio ha llevado a limitar el uso de esta herramienta. Se ha convertido en la tendencia con el avance de nuevas técnicas de diseño asistido por ordenador (CAD) y la posibilidad de crear modelos sólidos tridimensionales por los diseñadores de piezas y moldes. La principal dificultad es que es casi imposible extraer automáticamente una superficie de plano medio de modelos sólidos complejos, aunque han habido algunos esfuerzos en esta dirección [27]. Normalmente, la tarea de modelar el plano medio ocupa el 80% del tiempo utilizado para la realización de la simulación. En la actualidad, el modelo de superficie se ha convertido en la principal línea de simulación del moldeo por inyección [27-31].

Es conocido también como Análisis de Elementos Finitos de Dominios Duales (DFEA según siglas en inglés) por el desarrollo alcanzado por la empresa Moldflow en esta técnica de simulación. Esta técnica consta de tres pasos básicos: generación de una malla de superficie, establecer relaciones entre los elementos de las superficies superior e inferior, de modo que puede definirse un espesor, y la adición de elementos conectores para mantener los patrones de flujo físicamente realistas [10].

Se considera una sección transversal de una placa rectangular a la que se inyecta en el centro. Si prescribimos el espesor de los elementos de superficie sería posible desarrollar un análisis 2.5D en la superficie de la malla. Sin embargo, tal análisis no sería físicamente consistente, ya que el material fluye sobre la superficie superior, alrededor de los bordes y luego a lo largo de la superficie inferior formando una línea de soldadura en el punto de inyección. La solución es vincular las superficies superior e inferior en el punto de inyección. El material fluye entonces simultáneamente a lo largo de las superficies superior e inferior, tal y como se esperaba.

De hecho, se realizan dos análisis, uno en cada lado de la malla de superficie. Como se están llenando dos dominios es necesario duplicar el flujo en el punto de inyección para obtener los tiempos de llenado calculados con la malla de plano medio para una geometría dada. El modelo se muestra en la Figura 3.

El modelo de superficie crea una malla en las superficies exteriores del modelo sólido geométrico 3D. Los elementos de las superficies opuestas de una pared se emparejan y alinean. Los cálculos térmicos y de flujo se llevan a cabo entonces en las dos superficies. Cuando el flujo sobre las superficies opuestas no coincide, es necesario insertar un elemento conector adicional desde el punto no alineado a través del espesor hacia el otro lado. En particular, un elemento de conexión se debe introducir en cualquier nervio. Cabe señalar que el modelo de superficie todavía adopta la aproximación de Hele-Shaw y por lo tanto su formulación es muy similar al modelo de plano medio [9, 30].

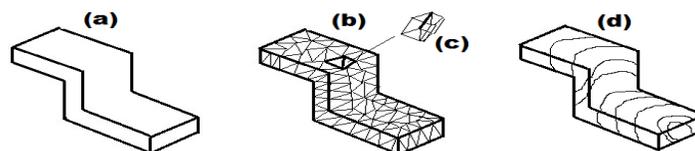


Fig. 3. Simulación con modelo de superficie: (a) sólido; (b) malla de superficie; (c) elemento conector; (d) simulación

Este modelo se utilizó inicialmente para el análisis del llenado y luego se extendió a otras etapas del moldeo por inyección y el moldeo por inyección asistido por gas [32, 33]. Las categorías de las superficies son: emparejadas, no emparejadas y de bordes.

En este contexto general, las superficies generalmente opuestas pueden ser paralelas, inclinadas entre sí, encontrarse en un ángulo agudo o de otra manera, y no necesitan ser planas, a condición de que un espesor o espesores pueden ser asignados al espacio entre las superficies [34].

Las ecuaciones utilizadas para la simulación de moldeo por inyección constan de una ecuación (25) para la presión, como una función de (x,y) , y una ecuación para la temperatura (19). Con las condiciones de frontera adecuadas [18] estas ecuaciones se pueden resolver usando un esquema híbrido [35] en el que el elemento finito y la solución de diferencias finitas se utilizan para la presión y temperatura, respectivamente [18]. Los nodos que forman la malla se encuentran en el plano medio de la pieza.

La red para el campo de temperatura llena el espacio ocupado por el polímero fundido y por lo tanto es tridimensional. A pesar de la falta de la componente de la velocidad en (z) , esta se calcula en cada punto dentro de la cavidad del molde.

V. MODELO SOLIDO (3D)

Muchas situaciones que se producen durante el proceso de llenado del molde no se pueden predecir con precisión utilizando la aproximación de Hele-Shaw. Con el desarrollo de la potencia de los ordenadores la simulación en 3D se convierte en una solución razonable y prometedora. En general, se debe utilizar en las geometrías que no siguen el enfoque tradicional de diseño de piezas de paredes delgadas. El modelo 3D funciona bien especialmente con piezas sólidas y gruesas.

Estas ecuaciones se han utilizado sin el término de la gravedad, ρg , para la simulación de la fase de llenado [36, 37]. Para tener en cuenta el efecto de la inercia en el flujo de polímero fundido (ramificación o efecto de chorro) el término inercial no puede despreciarse. Despreciar las fuerzas como la gravedad (ρg) en la ecuación de momento depende de la geometría y el material del sistema. A través del análisis dimensional, la ecuación de energía se puede reducir a una forma más simple [37].

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + 2\eta \dot{\gamma} : \dot{\gamma} \quad (26)$$

Esta ecuación se ha utilizado y determinado para los dominios de polímero y de aire (fluido ficticio) [37]. El término de disipación viscosa debe ser tenido en cuenta para el dominio del aire.

Después de llenar la cavidad, la presión se incrementa mediante la inyección de polímero adicional para compensar la contracción volumétrica. En esta etapa (fase de compactación) no puede ya ser despreciado el término de compresibilidad. La ecuación (4) puede ser utilizada para tener en cuenta la contracción del polímero en las etapas de llenado y compactación [37]. Las ecuaciones (27-29) también se han utilizado como ecuaciones gobernantes para flujo compresible durante la etapa de compactación [36]. Los efectos de compresibilidad se incluyen con la incorporación de la ecuación de estado en la ecuación de continuidad.

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \alpha \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p \right) - \beta \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) \quad (27)$$

$$0 = -\nabla p + \nabla \cdot \left(2\eta \dot{\gamma} - \frac{2}{3} \eta \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \quad (28)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \beta T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p \right) + \nabla \cdot (k \nabla T) + 2\eta \dot{\gamma} : \dot{\gamma} \quad (29)$$

donde, \mathbf{I} es la matriz identidad, α es el coeficiente de compresibilidad, β es el coeficiente de expansión térmica (expansión de volumen). La densidad y los coeficientes pueden calcularse simplemente a partir de la ecuación de estado.

VI. CONDICIONES DE FRONTERA

La solución de las ecuaciones de conservación y las ecuaciones constitutivas es posible sólo después de establecer las condiciones de frontera en el dominio de flujo del material polimérico. Las condiciones para el análisis en las fronteras dependen en gran medida de cada problema particular y deben describirse completamente para todas las aplicaciones diferentes de procesamiento de polímeros.

Para los problemas de estado estacionario, el conjunto de ecuaciones de flujos viscosos es elíptico, y elíptico-hiperbólico para fluidos viscoelásticos. Los problemas elípticos tienen condiciones de frontera de todo el perímetro del dominio, mientras que en los problemas hiperbólicos las condiciones de frontera son más complicadas para determinarse y requieren un cierto grado de ensayo y error. Este es particularmente el caso de las fronteras de salida, que son más comunes que las fronteras no artificiales o computacionales, establecidas arbitrariamente para reducir el dominio computacional.

Para los problemas no estacionarios, el conjunto de ecuaciones es parabólico debido al tiempo y también requieren condiciones iniciales, en el tiempo cero; la solución procede en el tiempo hasta que se alcanza un estado de equilibrio (si existe).

Las condiciones de frontera pueden ser fijas o naturales. Estos tipos de fronteras se refieren, respectivamente, a las variables primarias (velocidades, presiones, y temperaturas) o variables que involucran sus derivadas (tensiones, tracciones de superficie, flujos de calor, etc.).

Algunas de las condiciones de frontera habituales para el flujo en el procesamiento de polímeros son [8]:

- El perfil de velocidad está completamente desarrollado a lo largo de la entrada del dominio. Los perfiles de tensiones también están completamente desarrollados si se involucra la viscoelasticidad mediante un modelo constitutivo viscoelástico. La velocidad normal se establece en cero.
- La componente de velocidad radial y las tensiones de corte se establecen en cero debido a la simetría a lo largo de la línea central (si existe, como es el caso de flujo de revolución).
- Se impone condición de no deslizamiento del material a lo largo de las paredes, la cual establece que la velocidad del fluido, es cero, si la frontera está parada, o distinta de cero si la frontera es móvil. En los casos donde el fluido se desliza en la pared, como es el caso de algunos polímeros, entonces se debe considerar una ley de deslizamiento basada en las mediciones de velocidad con respecto a los componentes tangenciales del tensor de tensiones.
- En problemas con superficies libres y especialmente para materiales poliméricos fundidos, debido a su gran carácter viscoso, se supone cero tensión superficial, en conjunto con la condición cinemática de no flujo normal a la superficie que es $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$, donde \mathbf{n} es el vector unitario normal a la superficie vector.
- La mayoría de las soluciones computacionales asumen un dominio lo suficientemente grande donde se imponen cero tracciones superficiales y cero velocidades transversales (asumiendo implícitamente un perfil de velocidades completamente desarrollado a la salida). Para los modelos viscoelásticos se utilizan las tensiones de corte completamente desarrolladas, a menos que se aplique una velocidad al material en la frontera de salida.

Para condiciones de frontera térmicas, la situación es aún más compleja de describir debido a los diferentes tipos de condiciones térmicas en el procesamiento de polímeros. Sin embargo, en la mayoría de los cálculos las siguientes condiciones son muy representativas de lo que se ha implementado en base a las condiciones de flujo anteriores [8]:

- Se considera un perfil de temperaturas constante a lo largo del dominio de entrada, en algunas ocasiones basado en mediciones o valores ya prefijados.
- El flujo de calor se ajusta a cero a lo largo de la línea central (si existe, como es el caso de un flujo de revolución), debido a la simetría.
- Las superficies sólidas (en donde la temperatura es fija) son consideradas isotérmicas o adiabáticas (flujo de calor cero) o al menos es necesario un balance de transferencia de calor entre el fluido y la frontera sólida [38], en este último caso es necesario calcular un número de Biot local según (30),

$$Biot = \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_w \frac{r_i}{T_s - T_w} \quad (30)$$

donde r_i es el radio local (gap), T_s es la temperatura de los alrededores y T_w es la temperatura en la pared de la frontera local el cual, si es cero, consideraremos paredes adiabáticas, y si es uno, consideraremos paredes isotérmicas. Otro tipo de condiciones de frontera para las paredes térmicas involucran el conocimiento del flujo de calor en la pared basado en una medición efectiva del coeficiente de transferencia de calor pero también es importante considerar un número de Biot local que no sea cero.

- A lo largo del dominio de salida se considera de nuevo la posibilidad de frontera abierta o libre. Sin embargo, se asume que el dominio es lo suficientemente grande como para suponer que no hay salida de flujo de calor.
- En problemas con superficies libres se considera por lo general el flujo de calor cero, esto quiere decir que: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = 0$, o se necesita un balance de transferencia de calor de acuerdo con: $q_n = h_t (T_f - T_a)$, donde h_t es el coeficiente de transferencia de calor del medio refrigerante (normalmente aire) de temperatura T_a , y T_f es la temperatura desconocida de la superficie libre.

Se requieren condiciones iniciales para el flujo no estacionario y particularmente en el moldeo por inyección. Las mismas condiciones de frontera aplicadas en el molde deben considerar invariablemente la interacción entre el molde y el material fundido que está fluyendo y solidificando.

VII. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

Las ecuaciones diferenciales anteriores sólo se pueden resolver numéricamente debido a la complejidad del problema y las geometrías involucradas. Existen varios métodos tales como diferencias finitas (FDM), de elementos finitos (FEM), los elementos de frontera (BEM) y de volúmenes finitos (FVM), disponibles para resolver las ecuaciones que rigen el proceso en las simulaciones tridimensionales para el moldeo por inyección. Los métodos FEM y FVM son los prevaletentes para la simulación tridimensional en el moldeo por inyección debido a su capacidad de lidiar con geometrías complejas y problemas no lineales.

El método numérico de elementos finitos es la opción de la mayoría de los programas comerciales de simulación del moldeo por inyección aunque se han hecho incursiones con el método de volumen finito y el método de elemento de frontera. Mientras la mayor parte de trabajo académico fue realizado empleando diferencias finitas o el método de elementos finitos para la solución de las ecuaciones que gobiernan el proceso, el método de volumen finito fue ampliamente empleado en algunos campos de la mecánica de los fluidos Newtonianos y no Newtonianos.

A. Método de Diferencias Finitas (FDM)

Es un método numérico relativamente simple y eficiente. El dominio físico se discretiza en una red de diferencias finitas. Se genera un conjunto de ecuaciones algebraicas con derivadas de ecuaciones diferenciales parciales expresadas por diferencias finitas de los valores de las variables en los puntos de la red. Su uso sólo se restringe a dominios simples y regulares, debido a que es difícil de aplicar en bordes irregulares o en dominios complicados (comunes en el moldeo por inyección) [39].

B. Método de Elementos Finitos (FEM)

Su principal ventaja es que tiene una excelente flexibilidad en el trato con geometrías complejas y bordes irregulares. Las variables de campo se representan con funciones de forma y valores nodales de cada elemento finito. El tiempo de cálculo depende del número de elementos finitos de la malla y los grados de libertad por nodo. En los problemas transitorios, se utiliza normalmente una expresión de diferencias finitas para la derivada en el tiempo en conjunto con la discretización del elemento finito [39].

C. Método de Elementos de Frontera (BEM)

La frontera se discretiza en lugar de la parte interior del dominio físico y las variables de campo se calculan allí, lo que reduce la dimensionalidad de una solución por uno. La discretización se deriva a través del método de peso residual, con la función de peso tomada como la solución fundamental e integrando por partes. El número de incógnitas y los esfuerzos computacionales y de generación de la malla se reducen considerablemente. Sin embargo, cuando la solución fundamental no puede ser fácilmente derivada, como en el caso de problemas no lineales, la utilidad de este método es afectada severamente [7].

D. Método de Volúmenes Finitos (FVM)

Los principios de conservación se aplican a un volumen de control fijo y las formas integrales de las ecuaciones que rigen se resuelven en el dominio físico. Se trata de un tipo particular de diferencias finitas, pero tiene la ventaja de que se puede aplicar a dominios arbitrarios irregulares y complicados utilizando pequeños volúmenes. Como las formas integrales de las ecuaciones se resuelven directamente en el dominio físico no se requiere una transformación de coordenadas y las ecuaciones de masa, cantidad de movimiento y la energía se conservan [40].

VIII. VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE LOS MODELOS

A. Ventajas del modelo de plano medio

- Mucho menor tiempo de cálculo para la simulación. Se utiliza método de simplificación en la búsqueda de la solución de las incógnitas en el sistema de ecuaciones gobernantes. Las ecuaciones de conservación pueden reducirse a una ecuación para la presión dependiente de las coordenadas (x,y) , y una ecuación para la temperatura.
- Utiliza esquema híbrido de solución con el análisis de elementos finitos para determinar el campo de presión y diferencias finitas para determinar el campo de temperatura.
- El mallado del plano medio se realiza principalmente con elementos triangulares (tres nodos), y cada elemento tiene un espesor asignado.

B. Desventajas del modelo de plano medio

- Para componentes tridimensionales y complejos es difícil de identificar y construir un plano medio apropiado. La malla del plano medio a menudo no es tan plana como la geometría original [7]. Típicamente, el 80% del tiempo total de simulación se utiliza para modelar el plano medio [9].

- A pesar de su aplicación con éxito y de ser ampliamente adoptada, la formulación de flujo de Hele-Shaw tiene limitaciones debido al flujo rastrero inherente y el asumir pared delgada. Por ejemplo, no se puede modelar con precisión el comportamiento de los flujos tridimensionales en componentes gruesos y complejos o el frente de flujo del polímero fundido (flujo fuente), en regiones donde el espesor varíe bruscamente o con uniones de frentes de flujo (líneas de soldadura), tampoco es posible en las regiones de piezas con características especiales como huecos, esquinas y/o nervios. La formulación del flujo de Hele-Shaw aplicada a las líneas de suministro con elementos de dimensión simétrica con respecto al eje, no puede capturar tales desequilibrios de flujo.
- Las características estructurales de la pieza no se conservan por lo que este enfoque impide el análisis estructural y por consiguiente el análisis de la deformación de la pieza.
- Los efectos inerciales y gravitacionales se desprecian ya que suelen ser menores en comparación con las fuerzas viscosas y son difíciles de manejar con la técnica de 2.5D. Sin embargo, pueden convertirse en factores importantes en el patrón de flujo, especialmente en componentes gruesos y complejos o en aplicaciones con alta velocidad de flujo, en placas planas con nervios (flujo rama), bajo aberturas estrechas (jet), y en las juntas, donde el espesor cambie de repente (efecto de extrusión). Para el moldeo por inyección por reacción en el que la resina reaccionante es mucho menos viscosa que el termoplástico fundido no pueden ser ignoradas la inercia del fluido y la gravedad.
- Las piezas moldeadas por micro-inyección y micro-piezas con características de la superficie o insertos, la co-inyección y la inyección asistida por gas también presentan desafíos para la simulación 2.5D convencional debido a la dificultad y la ambigüedad en el mallado de las geometrías tridimensionales.

C. Ventajas del modelo de superficie

- Se lleva a cabo el mallado de la superficie de la pieza, sin el engorroso proceso de generar el plano medio. Con los avances en las técnicas de CAD es más factible su uso para los diseñadores.
- El tiempo extra de cálculo añadido es irrelevante teniendo en cuenta el tiempo que sería necesario para la creación y generación del plano medio. Con respecto al modelo plano medio se añade relativamente poca carga computacional y sus resultados son muy similares.
- Representa una pieza tridimensional. Permite el análisis directo de modelos geométricos sólidos de paredes delgadas.

D. Desventajas del modelo de superficie

- Utiliza la formulación de flujo de Hele-Shaw, con las consiguientes limitaciones establecidas en las desventajas del modelo de plano medio.

E. Ventajas del modelo sólido 3D

- Elimina la necesidad de crear una malla de plano medio, no utiliza el enfoque 2.5D y resuelve las ecuaciones de conservación en tres dimensiones [10].
- Es cada vez más disponible para los diseñadores debido a los progresos realizados en las velocidades de cálculo y el costo decreciente de ordenadores de alto rendimiento.
- Permite: monitoreo y predicción de frente de flujo (interfaz fundida de polímero/aire) y una representación precisa de la evolución de su topología compleja.

- Permite la predicción de: el flujo, en y cerca de las paredes sólidas, el fenómeno de la fusión de dos o más corrientes de polímero fundido y la cinemática de las zonas donde las tensiones de corte y las deformaciones contribuyen significativamente al campo de tensiones como pueden ser los nervios, las aberturas y los cambios bruscos de espesor.
- Brinda información más detallada y precisa [7] como son: el flujo fuente, la orientación molecular, la distribución de velocidad, temperatura, cristalinidad y grado de curado para materiales reactivos en el frente de flujo. En la región de flujo de fuente, el flujo transversal es tan importante como el flujo en la dirección del plano. Con el enfoque de Hele-Shaw sólo se realiza un enfoque simple basado en el método de conservación de la masa.

F. Desventajas del modelo sólido 3D

- Hay dos grandes puntos con necesidad de mejora: la resolución en la dirección del espesor y el excesivo tiempo computacional requerido.
- Es necesario tener muchos elementos finitos a través del espesor para capturar el alto gradiente térmico en la dirección del espesor debido a que las piezas moldeadas por inyección son típicamente de secciones de paredes delgadas [10].
- Se requiere discretización explícita de la malla en la dirección del espesor y la solución precisa se encuentra en una resolución adecuada en la dirección del espesor.
- Debido a que el tamaño de la malla en la dirección de flujo es mayor que en la dirección del espesor, se obtienen mallas con una mala relación de aspecto del dominio en tres dimensiones, que puede conducir a inestabilidades numéricas y errores en la solución.

IX. CONCLUSIONES

Los tres modelos principales para llevar a cabo la simulación del moldeo por inyección fueron revisados pasando desde los modelos 2.5D, usando la aproximación de Hele-Shaw, a los modelos 3D. Los modelos de plano medio y de superficie, basados en la aproximación de Hele-Shaw, tienen buenas cualidades en cuanto a mayor potencia de cálculo y menor tiempo de cómputo, pero tienen dificultades para predecir con precisión el comportamiento del flujo de polímero fundido en regiones tridimensionales como el frente de flujo, líneas de soldadura, esquinas, nervios y cambios bruscos en el espesor. La generación de la malla de plano medio en piezas de geometría compleja es muy complicada. A pesar de esto, el modelo de superficie o de dominio dual con técnicas híbridas es el más utilizado hoy con buena progresión práctica para la simulación de la inyección. El desarrollo de modelos de simulación en 3D permite una predicción más precisa del comportamiento de las cantidades de flujo de polímero, pero es necesario encontrar métodos para simplificar el cálculo, reducir el tiempo de cálculo requerido y mejorar la resolución en la dirección del espesor de las piezas.

REFERENCIAS

- [1] A. I. Isayev and C. A. Hieber, "Toward a Viscoelastic Modeling of the Injection-Molding of Polymers," *Rheologica Acta*, vol. 19, pp. 168–182, 1980.
- [2] H. Mavridis, "Mathematical Modeling of Injection Mold Filling: A Review," *Advances in Polymer Technology*, vol. 6, pp. 457–466, 1986.
- [3] S. L. Mok, "Review of Research in the Determination of Process Parameters for Plastic Injection Molding," *Advances in Polymer Technology*, vol. 18, pp. 225–236, 1999.
- [4] S. Richardson, "Hele-Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel," *J. Fluid Mech.*, vol. 56, pp. 609–618, 1972.

- [5] V. W. Wang, C. A. Hieber, and K. K. Wang, "Dynamic Simulation and Graphics for the Injection- Molding of 3-Dimensional Thin Parts," *Journal of Polymer Engineering*, vol. 7, pp. 21-45, 1986.
- [6] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics: Cambridge Mathematical Library*, 2000.
- [7] S.-W. Kim and L.-S. Turng, "Modelling and simulation in materials science and engineering," vol. 12, pp. S151–S173, 2004.
- [8] E. Mitsoulis, "Computational Polymer Processing," in *Modeling and Simulation in Polymers*, P. Gujrati and A. Leonov, Eds., ed: WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2010, pp. 127-188.
- [9] D. Cardozo, "Three Models of the 3D Filling Simulation for Injection Molding: A Brief Review," *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 27, pp. 1963-1974, 2008.
- [10] P. K. Kennedy, "Practical and Scientific Aspects of Injection Molding Simulation," PhD, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, 2008.
- [11] M. E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*. San Diego: Academic Press, 1981.
- [12] J. Koszkuł and J. Nabialek, "Viscosity models in simulation of the filling stage of the injection molding process," *Journal of Materials Processing Technology* pp. 183-187, 2004.
- [13] D. G. Baird and D. I. Collias, *Polymer Processing: Principles and Design: Butterworth-Heinemann*, 1995.
- [14] S. Middleman, "Fundamentals of Polymer Processing," ed: McGraw-Hill, 1977, pp. 8-68.
- [15] H. A. Barnes, J. F. Hutton, and K. Walters, "An Introduction to Rheology," *Rheology Series*, 1989.
- [16] R. G. Larson, "The Structure and Rheology of Complex Fluids," ed: Oxford University Press, 1999, pp. 1-56.
- [17] Binxin Yang, Jie Ouyang, Qiang Li, Zhifeng Zhao, and C. Liu, "Modeling and simulation of the viscoelastic fluid mold filling process by level set method," *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 165, pp. 1275-1293, 2010.
- [18] P. K. Kennedy, *Flow Analysis of Injection Molds: Hanser*, 1995.
- [19] E. C. Bernhardt, *Computer Aided Engineering for Polymer Processing: Hanser*, 1987.
- [20] C. L. Tucker, *Computer Modeling for Polymer Processing: Hanser*, 1995.
- [21] H. H. Chiang, C. A. Hieber, and K. K. Wang, "A Unified Simulation of the Filling and Postfilling Stages in Injection-Molding. 2. Experimental-Verification," *Polymer Engineering and Science*, vol. 31, pp. 125-139, 1991.
- [22] F. P. T. Baaijens, "Calculation of Residual-Stresses in Injection Molded Products," *Rheologica Acta*, vol. 30, pp. 284-299, 1991.
- [23] H. H. Chiang, K. Himasekhar, N. Santhanam, and K. K. Wang, "Integrated Simulation of Fluid-Flow and Heat-Transfer in Injection-Molding for the Prediction of Shrinkage and Warpage," *Journal of Engineering Materials and Technology—Transactions of the ASME*, vol. 115, pp. 37-47, 1993.
- [24] L. S. Turng, Wang, V. W. and Wang, K. K. ., "Numerical-Simulation of the Coinjection Molding Process," *Journal of Engineering Materials and Technology—Transactions of the ASME*, vol. 115, pp. 48-53, 1993.
- [25] Sung-Joo Choi and S. K. Kim, "Multi-scale filling simulation of micro-injection molding process," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 25, 2011.
- [26] F. R. Phelan, "Simulation of the Injection Process in Resin Transfer Molding," *Polymer Composites*, vol. 18, pp. 460-476, 1997.
- [27] H. Yu and P. K. Kennedy, "Apparatus and methods for performing process simulation using a hybrid model," 2004.
- [28] W. Cao, R. Wang, and C. Y. Shen, "A Dual Domain Method for 3-D Flow Simulation," *Polymer- Plastics Technology and Engineering*, vol. 43, pp. 1471-1486, 2004.
- [29] H. Yu, C. Kietzmann, P. Cook, S. Xu, F. Costa, and P. Kennedy, "A New Method for Simulation of Injection Molding," presented at the SPE Annual Technical Conference – ANTEC, Chicago, Illinois, 2004.

- [30] Ding Yang, Peng Zhao, Huamin Zhou, and L. Chen, "Computer determination of weld lines in injection molding based on filling simulation with surface model," *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 33, pp. 1403-1415, 2014.
- [31] Huamin Zhou, Zhiyong Wang, Jianhui Li, and D. Li, "A Surface Model-Based Simulation for Warpage of Injection-Molded Parts," *POLYMER ENGINEERING AND SCIENCE*, pp. 785-794, 2011.
- [32] H. M. Zhou and D. Q. Li, "Computer Simulation of the Filling Process in Gas-Assisted Injection Molding Based on Gas-Penetration Modeling," *Journal of Applied Polymer Science*, vol. 90, pp. 2377-2384, 2003.
- [33] D. Li and H. Zhou, "Modelling and Simulation of Residual Esfuerzos and Warpage in Injection Moulding, , Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C " *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 218, pp. 521-530, 2004.
- [34] H. G. Yu and R. Thomas, "Method for modelling three dimension objects and simulation of fluid flow " Australia Patent, 2000.
- [35] C. A. Hieber and S. F. Shen, "A Finite-Element-Finite-Difference Simulation of the Injection- Molding Filling Process," *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 7, pp. 1-32, 1980.
- [36] F. Ilinca and J. F. H'etu, presented at the SPE ANTEC 2000.
- [37] G. A. A. V. Haagh, G. W. M. Peters, F. N. Van De Vosse, and H. E. H. Meijer, "A 3-D finite element model for gas-assisted injection molding - simulations and experiments," *Polymer Engineering and Science*, vol. 41, pp. 449-465, 2001.
- [38] E. Mitsoulis, R. Wagner, and F. L. Heng, "Numerical Simulation of Wire- Coating Low- Density Polyethylene: Theory and Experiments," *Polym. Eng. Sci.*, vol. 28, pp. 291-310, 1988.
- [39] S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow* McGraw-Hill, 1980.
- [40] J. C. Tannehill, D. A. Anderson, and R. H. Pletcher, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, 2nd ed.: Taylor and Francis, 1997.