La Transformada de Mellin en la solución de una versión no lineal de la Ecuación de Black-Scholes

Oswaldo González Gaxiola
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas
Universidad Autónoma Metropolitana-Cuajimalpa
México D.F., México
ogonzalez@correo.cua.uam.mx

Abstract— Nonlinear Black–Scholes equations have been increasingly attracting interest over the last decades, since they provide more accurate values by taking into account more realistic assumptions, such as transaction costs, risks from an unprotected portfolio, large investor's preferences or illiquid markets, the volatility, the drift and the option price itself. In this paper we use the group of symmetries for the study of the partial differential equation of the financial model of Black-Scholes, and will relate these symmetries with Mellin transform to find the price of an investment option of European type.

Keyword— Black-Scholes equation, Mellin's transform, investment options, volatility.

Resumen— Las versiones no lineales de la ecuación de Black-Scholes han estado atrayendo cada vez más interés en las últimas décadas, ya que proporcionan resultados más precisos, tomando en cuenta supuestos más realistas, tales como los costos de transacción, los riesgos de una cartera sin protección, las preferencias de los inversores o los mercados sin liquidez, la volatilidad, la flotación y el propio precio de la opción. En el presente trabajo haremos uso del grupo de simetrías para el estudio de la ecuación diferencial parcial del modelo financiero de Black-Scholes y relacionaremos dichas simetrías con la transformada de Mellin para hallar el precio de una opción de inversión de tipo europeo.

Palabras claves—Ecuación de Black-Scholes, transformada de Mellin, opciones de inversión, volatilidad.

I. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la rapidez y la volatilidad en las finanzas, obligan a buscar mecanismos que permitan predecir los resultados y se facilite la toma de decisiones. El presente trabajo tiene como propósito hacer un estudio matemático, con suficiente profundidad conceptual, de un modelo de valoración de derivados financieros, conocido en el ámbito financiero como el modelo de Black-Scholes-Merton, y se abordará una versión no lineal de dicho modelo. El modelo de Black-Scholes es uno de los modelos matemáticos más utilizados en la toma de decisiones financieras a nivel internacional.

Los derivados, en general son contratos de compra/venta que, dependiendo del tipo, obligan o permiten a dos agentes establecer un precio de compra/venta y una fecha de contrato por una cantidad fija de activos. En general, un activo puede estar en cualquier mercado financiero. El derivado financiero que el presente trabajo se toma en cuenta es la opción, a saber:

La *opción* es un contrato que le da al dueño el derecho, más no la obligación de comprar o vender el activo subyacente antes o en la fecha de ejecución; es decir, al entrar en una opción con el propietario de un activo de nuestro interés, la opción nos da la posibilidad de comprar el activo durante la vigencia del contrato; de la misma manera, se puede elegir no comprar el activo. La opción obliga al otro miembro a vender el activo en caso de requerirse. De la misma forma, se puede hacer una opción que obligue a un agente a comprar el activo en caso de que el otro decida venderlo. Los intercambios deben hacerse antes de la fecha de ejecución.

El modelo de Black-Scholes es una descripción matemática de los mercados financieros y los instrumentos de inversión derivados.

La ecuación de Black-Scholes fue deducida en [4], [10] y es la ecuación diferencial parcial lineal

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}+rC\frac{\partial C}{\partial S}-rC=0,\quad 0\leq t<T, S\geq 0, \tag{1}$$

donde $C(S,t)$ son los valores de la opción de algún tipo (europeo, asiática,…,etc) como función del precio de los activos S y del tiempo t, r es la tasa de interés, σ es la volatilidad del stock [10].

Cuando se quiere valorar una opción financiera utilizando la ecuación de Black-Scholes u otros modelos análogos se emplean cinco variables: el valor del subyacente, el precio de ejercicio, el tiempo hasta el vencimiento, el tipo de interés libre de riesgo y la volatilidad de los rendimientos del subyacente. El uso de esta fórmula conlleva aceptar los supuestos de volatilidad constante, de mercados eficientes y que no existan costos de transacción. En el presente trabajo vamos a considerar la ecuación de Black-Scholes (1) para modelar un mercado financiero en el cual la volatilidad no es constante, resultando de ello un modelos cuya ecuación diferencial parcial no será lineal.

En trabajos recientes se ha estudiado la ecuación de Black-Scholes desde el punto de vista de los grupos de simetrías de Lie [2] y el método de Wei-Norman para el caso en el cual algunos parámetros del modelo son dependientes del tiempo [4], también se han hecho estudios del generador infinitesimal de Black-Scholes y las transformadas integrales en [5] y en [6]; algunos trabajos diferentes en los que se ha estudiado la ecuación de Black-Scholes desde el punto de vista de la mecánica cuántica se pueden ver, por ejemplo en [7], [8]. En el presente trabajo utilizaremos algunos resultados de los autores antes citados y a manera de continuación del trabajo hecho en [9] usaremos la Transformada de Mellin y sus propiedades para hallar la solución de la ecuación de Black-Scholes (precio de la opción) a partir de una de sus simetrías y se abordará cierto caso de la ecuación de Black-Scholes no lineal.

II. La Ecuación de Black-Scholes, simetrías y la transformada de Mellin

Por la fórmula de Feynman–Kac, estudiada en [12] y haciendo uso de la relación ahí obtenida con (1) tenemos

$$u(t,x)=e^{-r(T-t)}E^{x,t}h((X(T))=e^{-r(T-t)}\int_0^{\infty}h(x)p(t,T;x,x)dx \tag{2}$$

Por otra parte, si en general consideramos la ecuación diferencial parcial lineal

$$\frac{\partial u}{\partial t}=G(x,u,u^{(1)},....,u^{(n)}),\quad x\in\mathbb{R}$$

y denotamos por $u(e^{xY_j})=u(t,x)$ a la acción sobre las soluciones generadas por la simetría Y_j, entonces de (2) tenemos que

$$u(t,x)=\int_0^{\infty}G(e^{xY})u_0(y)p(t;x,y)dy=b(t,x;x)u_0(a(t,x;x)), \tag{3}$$

donde para cada simetría Y_j las funciones b y a serán conocidas.

Las simetrías de la ecuación de Black-Scholes (1), obtenidas en [1] y estudiadas desde el punto de vista algebraico en [2] son dadas por el campo vectorial

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ Y_2 = x\frac{\partial}{\partial x},\quad Y_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + (\ln x - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t)x\frac{\partial}{\partial x} - 2rtu\frac{\partial}{\partial u},$$

$$Y_4 = (\ln x - \frac{1}{2}\sigma^2)t)u\frac{\partial}{\partial u} - \sigma^2 tx\frac{\partial}{\partial x},$$

$$Y_5 = \sigma^2 tx\ln x^2\frac{\partial}{\partial x} + 2\sigma^2 t^2\frac{\partial}{\partial t}[((\ln x - \frac{1}{2}\sigma^2)t))^2 + 2\sigma^2 rt^2 + \sigma^2 t]u\frac{\partial}{\partial u},\quad Y_6 = u\frac{\partial}{\partial u},\quad Y_g = g(t,x)\frac{\partial}{\partial u},$$

donde g(t,x) es una solución arbitraria de la ecuación de Black-Scholes (1); si consideramos Y_4, tenemos la acción del flujo dada como

$$G(e^{xY_4})u(t,x) = x^{-x}e^{[\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 - (r-\frac{1}{2}\sigma^2)x]t}u(t, xe^{-x\sigma^2 t}).$$

Luego, considerando la solución estacionaria en (3), identificamos

$$u(t,x,x) = x^{-x}e^{[\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 - (r-\frac{1}{2}\sigma^2)x]t}$$

y así $u(0,y,x) = y^{-x}$, sustituyendo esto en (3) tenemos, haciendo $x = 2 - s$

$$\int_0^\infty y^{s-1}p(y,x,y)dy = e^{\frac{1}{2}(s-2)t[(s-1)\sigma^2+2r]}x^{s-1}.$$

Identificando en el lado izquierdo, de la última igualdad con la transformada de Mellin de la función de transferencia de (2) con respecto a la variable y, así obtenemos

$$M(p(t,x,y)(s)) = e^{\frac{1}{2}(s-2)t[(s-1)\sigma^2+2r]}x^{s-1}$$

de donde,

$$p(t,x,y) = M^{-1}(e^{\frac{1}{2}(s-2)t[(s-1)\sigma^2+2r]}x^{s-1})(y)$$

$$= F^{-1}(e^{\frac{1}{2}(-i\omega-2)t[(-i\omega-1)\sigma^2+2r]}x^{-i\omega-1})(-\ln y) = \frac{e^{-rt}}{\sigma y\sqrt{2\pi t}}\exp(-\frac{[\ln(\frac{y}{x}) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t]^2}{2t\sigma^2}).$$

Ahora, considerando que en (3) p es la función de densidad de probabilidad de transición para el movimiento Browniano geométrico. Así la función de pagos, solución de la ecuación de Black-Scholes (1) es dada por

$$u(t,x)=e^{-r(T-t)}E^{x,t}h((X(T))=e^{-r(T-t)}\int_0^\infty h(\xi)p(t,T;x,\xi)d\xi$$

$$=e^{-rt}\int_0^\infty h(\xi)\frac{e^{-rt}}{\sigma\xi\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{[\ln(\frac{\xi}{x})-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t]^2}{2t\sigma^2}\right)d\xi.$$

Para el caso de una opción europea, el valor de la opción tipo call (opción de compra) se obtiene de ésta última igualdad satisfaciendo las condiciones de frontera:

$$u_c(T,x)=\max(x-K,0),\ \ u_c(T,0)=0,$$

$u_c(t,x)\to x$ si $x\to\infty$, y en tal caso tenemos,

$$u(t,x)=xN\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}[\ln(\frac{x}{K})+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]\right)-e^{-r(T-t)}KN\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}[\ln(\frac{x}{K})+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]\right) \tag{4}$$

donde $N(h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{h}e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi$ y K>0 es el precio de ejercicio.

La fórmula de Black-Scholes (4) es una expresión que proporciona el valor de una opción de venta o compra (en el presente caso: europea) a partir de los siguientes datos; el tiempo hasta la fecha de expiración, el precio actual del activo subyacente, la tasa anual de interés, el precio de ejercicio de la opción y la volatilidad del activo subyacente. El principio básico para obtener la fórmula es construir una estrategia autofinancia da de cobertura contra el riesgo inherente a la opción en la fecha de ejercicio. El mecanismo de cobertura dinámica es un concepto importante para comprender el método proporcionado por la fórmula de Black-Scholes.

III. Resolución de Black-Scholes no lineal

En los modelos financieros, normalmente se supone los mercados sean competitivos y no existan fricciones de ningún tipo, es decir, que haya suficiente liquidez y no haya costos de transacción, de tal manera que un comerciante (trader) puede comprar o vender cualquier cantidad de acciones (assets) sin modificar su precio. En algunos modelos financieros [13], [14], durante períodos muy cortos de tiempo, la volatilidad σ puede ser una función de los costos de transacción, o de la segunda derivada del valor de la opción mientras que la tasa de interés r es constante. La idea es que no sólo el precio de los activos, sino también la volatilidad es un proceso estocástico [15]. Si la volatilidad satisface el proceso de Ornstein-Uhlenbeck obtenemos estas dos ecuaciones:

$$dS(t)=\mu S(t)dt+\sigma(t)S(t)dW_1(t),$$
$$d\sigma(t)=-\beta\sigma(t)dt+\delta dW_2(t),$$

los procesos $W_1(t)$ y $W_2(t)$ no son independientes y se tiene que $Corr(W_1(t),W_2(t))=\rho$, donde $|\rho|<<1$. Usando el lema de Ito podemos obtener una expresión para la diferencial estocástica de $d\sigma^2(t)$ la cual resulta ser

$$d\sigma^2(t) = [2\delta^2 - \beta\sigma^2(t)]dt + 2\delta\sigma(t)dW_2(t)$$

y en tal caso, la ecuación de Black-Scholes con $\beta = 1$ se convierte en la ecuación no lineal

$$u_t(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{u_{xx}(t,x)}{(1-\rho x\lambda(x)u_{xx}(t,x))^2} = 0. \qquad (5)$$

Si consideramos el caso especial en el cual, el precio del riego es unitario, es decir; $\lambda(x) = 1$, la ecuación (4) admite un álgebra de Lie no trivial [16] generada por

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}.$$

También para el presente caso, suponiendo que $\|\rho x u_{xx}\| < \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño (low impact of hedging) y considerando la aproximación funcional

$$\frac{1}{(I-\Phi)^2} \approx I + 2\Phi + O(\Phi)^3,$$

tenemos que (4) se transforma en

$$u_t(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx}(t,x)(1 + 2\rho x u_{xx}(t,x)) = 0. \qquad (6)$$

Ahora, considerando nuevamente las simetrías se tiene,

$$\Gamma(e^{\xi X_4})u(t,x) = u(t, xe^{\xi}) + e^{-\xi}u(t,x)$$

haciendo referencia a [17] y a [18], obtenemos

$$4\rho u_{xx}(t,x) = \sqrt{x_0}\, x^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{\sigma^2}{8}t}$$

y por lo tanto (integrando dos veces), la solución de (5) es

$$u(t,x) = x - \frac{\sqrt{x_0}}{\rho}\left(\sqrt{x}e^{\frac{\sigma^2}{8}t} + \frac{\sqrt{x_0}}{4}e^{\frac{\sigma^2}{4}t}\right),$$

donde $u(0,x) = x_0$ es la condición inicial. Recientemente se han hecho otro tipo de estudios sobre versiones no lineales de la ecuación de Black-Scholes, el lector puede hallar uno de ellos en [19].

IV. CONCLUSIONES

En este trabajo, investigamos cómo en un mercado con problemas de iliquidez, el comercio mismo afecta el precio de las opciones; para ello obtenemos una ecuación no lineal Black-Scholes que describe la evolución del precio de una opción europea desde que se firma un contrato hasta su fecha de vencimiento.

Cuando un inversionista desea vender un bono antes de la fecha de vencimiento, el mismo sabe que podrá realizarlo a un precio cercano al de cotización que rija a la fecha. Dentro del mercado para un activo determinado existe lo que se llama "bid price", que es el precio a que los operadores están dispuestos a comprar y el "ask price" que es el precio al que los mismos están dispuestos a vender. Cuando el mercado se torna ilíquido, estos dos precios difieren sustancialmente, no pudiéndose efectuar operación alguna, hasta que alguna de las partes ajuste su precio a lo requerido por la otra; así mismo el tiempo que demora realizar la transacción aumenta considerablemente respecto al que demoraría en una situación de liquidez. El riesgo de iliquidez, es el riesgo que un inversionista tiene al querer liquidar su tenencia de bonos y no poder realizarla en forma inmediata, teniendo que vender por un precio muy inferior al precio de cotización. En general el mercado se torna muy ilíquido cuando la volatilidad en los precios es muy alta, y se da en forma constante para algunas emisiones que de por si no tienen liquidez, ya sea porque el monto en circulación es muy pequeño o porque la mayoría de la emisión fue absorbida por grandes inversores, los cuales están dispuestos a mantenerla hasta la fecha de vencimiento. Una medida de las condiciones de liquidez es la "market bid-ask" dispersión (dispersión entre compra y venta) y el mismo es la diferencia entre la mejor oferta de venta y la mejor oferta de compra. Finalmente en el presente trabajo se ha hecho un estudio matemático, a través del modelo de Black-Scholes para encontrar el valor de la opción haciendo uso de las simetrías de la EDP no lineal que resulta de considerar la iliquidez del Mercado suponiendo volatilidad estocástica.

REFERENCIAS

[1] R.K. Gazizov and N. H. Ibragimov, *Lie Symmetry Analysis of Differential Equations in Finance*. Nonlinear Dynamics Vol. 17, 387-407, (1998).

[2] G. Silberberg; *Discrete Symmetries of the Black-Scholes Equation*; Proceedings of 10th International Conference in Modern Group Analysis; Larnaca Cyprus, 190-197, (2005).

[3] F. Black and M. Scholes, *The Pricing Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, (81), 637-659 (1973).

[4] C. F. Lo and C.H. Hui; *Valuation of financial derivatives with time-dependent parameters: Lie-algebraic approach*, Quantitative Finance, Vol. 1, 73–78; (2001).

[5] D. I. Cruz-Báez and J. M. González-Rodríguez; *A Semigroup Approach to American Options*, J. Math. Anal. Appl. 302, 157-165; (2005).

[6] O. González-Gaxiola and José A. Santiago; *The Black-Scholes Operator as the Generator of a C-{0}-Semigroup and Applications*, Int. Journal of Pure and Applied Math. Vol. 76, No. 2, 191-200 (2012).

[7] J. M. Romero, O. González-Gaxiola, J. Ruiz de Chávez and R.Bernal- Jaquez; *The Black-Scholes Equation and Certain Quantum Hamiltonians*, Int. Journal of Pure and Applied Math. Vol. 67, No. 2, 165-173; (2011).

[8] S. Fassari and F. Rinaldi; *On Some Potential Applications of the Heat Equation with a Repulsive Point Interaction to Derivative Pricing*, Rendiconti di Matematica, Serie VII Vol. 31, 35-52, Roma (2011).

[9] O. González-Gaxiola and J. A. Santiago, *An α-Mellin transform and some of its applications*, Int. Journal of Contemp. Math. Sciences, Vol. 7, No. 45-48, 2353-2361, (2012).

[10] N. Lebedev; *Special functions and their applications*, Dover,(1972).

[11] R.C. Merton, *Theory of Rational Options Pricing*, Bell Journal of Economic and Management Science (4), 141-183, (1973).

[12] S. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer Finance, (2004).

[13] R. Frey, *Market illiquidity as a source of model risk in dynamic hedging*, ed. by R. Gibson, Risk Publications, pp. 125-136, Risk Publications, London, (2000).

[14] U. Cetin, R. Jarrow and P. Protter, *Liquidity risk and arbitrage pricing theory*, Finance Stoch., 8, 311-341, (2004).

[15] L. Steven and A. Heston; *Closed-form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*; The Review of Financial Studies, 6, (2), (1993).

[16] L. A. Bordag, *On option-valuation in illiquid markets: invariant solutions to a nonlinear model, in Mathematical Control Theory and Finance* eds. A. Sarychev, A. Shiryaev, M. Guerra and M. R. Grossinho, Springer, pp. 72-94, (2008).

[17] M. S. Joshi, *The Concepts and Practice of Mathematical Finance*, Cambridge University Press, (2003).

[18] A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, Chapman & Hall/CRC, (2004).

[19] O. González-Gaxiola, J. Ruíz de Chávez and J. A. Santiago, *A Nonlinear Option Pricing Model Through the Adomian Decomposition Method*, Int. J. Appl. Comput. Math., 1 (2), 1-15, (2015).